

08 Utilisation des nombres complexes

08-01 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition

Soit a un nombre réel.

On appelle **racines carrées de a dans $\mathbb{C}$** les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$.

Exemple

Les racines carrées de (-2) dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Propriété

Tout nombre réel non nul admet exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$.

Démonstration

Si $a > 0$ alors $z^2 = a$ équivaut à $z^2 - a = 0$ qui équivaut à $(z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$.

Si $a < 0$ alors $z^2 = a$ équivaut à $z^2 - i^2(-a) = 0$ qui équivaut à $(z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$.

Dans les deux cas, l'équation admet exactement deux solutions.

Propriété

Soient trois réels a , b et c tels que $a \neq 0$.

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution qui est le réel $\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions qui sont les réels $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ et $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation a deux solutions complexes qui sont $\left(\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ et $\left(\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$.

Exemple

L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3$. Ses solutions dans $\mathbb{C}$ sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque

Lorsque le discriminant est négatif, les deux solutions complexes sont conjuguées.

08-01 Applications du cours**Application 1**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a] $z^2 = -9$

c] $z^2 - 3z + 3 = 0$

b] $2z^2 + 5 = 0$

d] $-2z^2 + 3z - 2 = 0$

Application 2

Le nombre u est une racine d'un polynôme complexe P à coefficients réels de la forme $P(z) = z^2 + bz + c$.

Déterminer b et c dans chacun des cas suivants.

a] $u = 1 + 5i$

b] $u = \sqrt{2}(1-i)$

Application 3

Trouver deux nombres dont la somme vaut 6 et dont le produit vaut 10.

Application 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$.

Application 5

On considère l'équation $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

Cette équation admet une solution réelle. Laquelle ?

Application 6

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 16z + 52$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que $P(z) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Application 7

Soient a , b , c et d les solutions de l'équation $(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0$.

Déterminer la nature précise du quadrilatère dont les sommets ont pour affixes a , b , c et d .